Métodos topológicos en el análisis no lineal
Clase 13 - 21/10 (versión preliminar)

Advertencia al lector: Estas páginas contienen algunas escenas de función implícita.

1 Callé mi amargura y tuve piedad

El título de esta sección puede haber dejado a pie a más de un gil, pero no a los lectores tangueros de estas notas, que saben muy bien lo que se encuentra implícito en ese silencio capaz de expresar una pena inaudita: Mentira, mentira, yo quise decirle...

Justamente, nos referiremos al teorema de la función implícita, cuya primera versión formal no es de Lepera sino de Cauchy. Se trata de uno de los principales resultados del análisis matemático aunque su sentido y alcances empiezan a hacerse claros bastante después de aquellos primeros cursos en los que todavía uno está luchando (no siempre con éxito) contra las derivadas parciales. Pero dejando de lado los detalles, entre aquellos sueños de juventud figura sin duda la posibilidad de describir localmente la curva dada por $f(x,y)=0$ como un gráfico, ya sea de y en función de x o de x en función de y. Para esto, es bastante previsible que necesitamos pedirle algo a f más allá de la (obvia) suavidad: por ejemplo, si $f(x,y)=x^2-y^2$ entonces el conjunto de nivel $C: f(x,y)=0$ consiste en dos rectas y, por más ganas que uno tenga, no hay forma de pensarlo como una curva en un entorno de $(0,0)$. Pero otro gallo cantaría si eligiéramos un punto $(x_0,y_0)\in C$ distinto del origen; allí ninguna coordenada del gradiente se anula y podemos despejar *a piacere*. Hay una forma muy sencilla de convencerse de que esto va a funcionar: supongamos por ejemplo que $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\neq 0$, entonces ya podemos quedarnos con un entorno $U\times V$ del punto en el que $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\neq 0$. Buscamos una función $y=y(x)$ tal que $f(x,y(x))=0$, así que derivando se debe cumplir

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y(x))+\frac{\partial f}{\partial y}(x,y(x))y'(x)=0, \tag{1}$$

es decir:

$$y'(x)=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x,y(x))}.$$

Pero además queremos que el gráfico de y pase por (x_0, y_0), es decir:

$$y(x_0) = y_0.$$

En otras palabras, tenemos una ecuación diferencial con una condición inicial; luego, existe un intervalo abierto $I \subset U$ que contiene a x_0 y una única solución $y : I \to V$. Si ahora vamos para atrás, a partir de (1) y del hecho de que I es conexo vemos que $f(x, y(x))$ es constante y, en consecuencia, vale 0 para todo $x \in I$.

Un detalle a tener en cuenta es que el teorema de la función implícita asume solamente que f es C^1, mientras que en la cuenta anterior le pedimos un poco más: que $\frac{\partial f}{\partial y}$ sea Lipschitz respecto de y. Sin esta última hipótesis, uno podría garantizar la existencia, pero tendría que lidiar mano a mano con la unicidad (no es válido, en un caso así, cargarla "a la cuenta del otario"). De todas formas, la relación con el teorema de existencia y unicidad no es caprichosa y, como veremos, vale la "recíproca": la solución de un problema de valores iniciales se puede obtener como función implícita de una ecuación apropiada... naturalmente, en un espacio de Banach. Para entender esto, necesitamos ver una versión más general del teorema de la función implícita, que a su vez tendrá aplicación a diversos problemas de contorno. Esta suerte de equivalencia no es casualidad, ya que detrás de las demostraciones de ambos teoremas se encuentra un elemento clave: el teorema de la contracción.[1]

A modo de ejemplo motivador, consideremos el problema T-periódico para la ecuación del péndulo

$$u''(t) + \mathrm{sen}(u(t)) = \lambda p(t), \tag{2}$$

donde p es una función T-periódica y $\lambda \in \mathbb{R}$ es un parámetro. Es posible probar (usando métodos variacionales) que siempre hay soluciones si $\overline{p} = 0$; en cambio, si $\overline{p} \neq 0$ entonces es claro que no hay soluciones cuando $|\lambda|$ es grande, al menos los suficiente como para que $|\lambda\overline{p}| > 1$. Lo que vamos a probar es que, bajo ciertas condiciones, siempre hay soluciones para $|\lambda|$ chico (sea quien sea p). Se podría objetar que el resultado es trivial, ya que por el método de super y subsoluciones alcanza con pedir $\|\lambda p\|_\infty \leq 1$ y tomar $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\beta = \frac{3\pi}{2}$; sin embargo, el argumento que veremos a continuación sirve también para p localmente integrable, es decir, $p \in L^1(0, T)$, extendida de manera T-periódica a todo $\mathbb{R}$.[2] Es claro que, aun en el caso de que p no sea acotada, el resultado no es ninguna sorpresa para $\lambda = 0$, ya que tenemos la solución trivial: justamente, la idea es usar el teorema de la función implícita para mostrar que existe una rama de soluciones $u = u(\lambda)$ definida para $\lambda \in (-\delta, \delta)$. Para ser más precisos, conviene recordar, en primer lugar, que las soluciones pueden obtenerse como puntos fijos del operador de Poincaré P_T, que en este caso está definido globalmente y podemos ya pensar

[1] Por supuesto, las primeras demostraciones del TFI son muy anteriores a Banach. La de Cauchy en realidad fue en el campo del análisis complejo; la versión habitual para $\mathbb{R}^n$ se debe a Dini.

[2] El que no haya quedado convencido de tomar p no continua, puede probar con otra ecuación, por ejemplo $u''(t) + u(t) + u(t)^3 = p(t)$.

también como función de λ, es decir:

$$P(x, y, \lambda) = (u(T), u'(T))$$

donde u es la única solución de (2) con condición inicial $u(0) = x, u'(0) = y$. Nos interesa mirar, entonces, el conjunto

$$C : F(x, y, \lambda) = (0, 0),$$

donde $F(x, y, \lambda) := (x, y) - P(x, y, \lambda)$. Usando el teorema de la función implícita, vamos a ver que en un entorno del punto $(0, 0, 0) \in C$, dicho conjunto se describe en la forma $(x(\lambda), y(\lambda), \lambda)$. Para esto necesitamos probar que la matriz

$$D_{(x,y)}F(0, 0, 0)$$

es inversible. Ahora tenemos buenas y malas noticias: la buena es que, al derivar solamente respecto de x y de y, ya podemos poner $\lambda = 0$. Y la mala es que tenemos que ver cómo se deriva la función $P(x, y, 0) = (u(T), u'(T))$, donde u es la solución del problema

$$u''(t) + \operatorname{sen}(u(t)) = 0, \qquad u(0) = x,\ u'(0) = y.$$

Y llega el momento de comprobar que, a fin de cuentas, no hemos perdido el cartel de guapos que ayer brillaban en la acción. Por ejemplo, si escribimos directamente el flujo $u = u(t, x, y)$, entonces la derivada $w = \frac{\partial u}{\partial x}$ verifica

$$w''(t) + \cos(u(t))w(t) = 0, \qquad w(0) = 1,\ w'(0) = 0.$$

En particular, para $x = y = 0$ resulta $u \equiv 0$, es decir: $w''(t) + w(t) = 0$ y, en consecuencia, $w(t) = \cos(t)$. Esto quiere decir que $\frac{\partial P_1}{\partial x}(0, 0, 0) = \cos(T)$. De la misma forma, para $w = \frac{\partial u}{\partial y}$ resulta

$$w''(t) + w(t) = 0, \qquad w(0) = 1,\ w'(0) = 0$$

y vale $\frac{\partial P_1}{\partial y}(0, 0, 0) = \operatorname{sen}(T)$. Ahora tenemos que derivar la segunda coordenada de P, para lo cual basta observar que $v = u'$ satisface la ecuación

$$v''(t) + \cos(u(t))v(t) = 0, \qquad v(0) = y,\ v'(0) = -\operatorname{sen}(x).$$

Al tomar acá $w = \frac{\partial v}{\partial x}$, la ecuación se pone más fea,

$$w''(t) - \operatorname{sen}(u(t))\frac{\partial u}{\partial x}(t)v(t) + \cos(u(t))w(t) = 0, \qquad w(0) = 0, w'(0) = -\cos(x)$$

pero, otra vez, al reemplazar para $x = y = 0$ se vuelve todo más apacible:

$$w'(t) + w(t) = 0, \qquad w(0) = 0, w'(0) = -1.$$

Esto prueba que $\frac{\partial P_2}{\partial x}(0, 0, 0) = -\operatorname{sen}(T)$ y una cuenta similar muestra que $\frac{\partial P_2}{\partial y}(0, 0, 0) = \cos(T)$. En definitiva, resulta

$$D_{(x,y)}F(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} 1 - \cos(T) & \operatorname{sen}(T) \\ -\operatorname{sen}(T) & 1 - \cos(T) \end{pmatrix},$$

que es inversible siempre que $T \neq 2k\pi$. Por el teorema de la función implícita, existe $\delta > 0$, un entorno $V \subset \mathbb{R}^2$ del origen y una única función $T : (-\delta, \delta) \to V$ suave tal que $T(\lambda) = (x(\lambda), y(\lambda))$ es un punto fijo del operador de Poincaré. Desde ya, la cuenta anterior se puede simplificar un poco si pasamos la ecuación a un sistema de primer orden aunque, como veremos, todavía se hace más sencillo si lo pensamos como un problema en dimensión infinita. Pero para eso hace falta ver primero algunos resultados de diferenciación en espacios de Banach.

2 Te busco y ya no estás

La literatura del tango es pródiga en nombres franceses como Des Grieux o Schaunard; sin embargo, después de una revisión exhaustiva se comprobó que ninguno se refiere al protagonista de esta sección: Maurice Fréchet. En realidad, vamos a hablar de la diferencial de “toda mi vida”, pero en un contexto más abstracto. Dados dos espacios normados X, Y y un abierto $A \subset X$, una función $f : A \to Y$ se dice (Fréchet) diferenciable en $x_0 \in A$ si existe un operador lineal continuo $T : X \to Y$ tal que

$$f(x) - f(x_0) = T(x - x_0) + R(x),$$

con $\frac{R(x)}{\|x-x_0\|} \to 0$ para $x \to x_0$. Como uno espera, se escribe $T = Df(x_0)$, la diferencial en x_0. Es claro, a partir de la definición, que f tiene que ser continua en x_0.

En $\mathbb{R}^n$, lo habitual es definir primero las derivadas parciales, pero cuando la dimensión es infinita, la cuestión se complica. Existen, por supuesto, nociones más débiles como la de Gateaux, que resulta muy útil en el cálculo de variaciones: f se dice Gateaux (otro francés) diferenciable en x_0 si existen todas las derivadas direccionales

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) := \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t}.$$

Si f es diferenciable, entonces es claro que también lo es en el sentido de Gateaux aunque al revés no vale ni siquiera en $\mathbb{R}^n$. Pero para un espacio normado de dimensión infinita puede ocurrir que las derivadas direccionales existan y sean continuas y, sin embargo, la función no sea diferenciable: un ejemplo más bien drástico es el de una función lineal $f : X \to Y$ que no sea continua: en tal caso, vale $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = f(v)$ para todo x_0, es decir, las derivadas direccionales son constantes... y f ni siquiera es continua. A modo de curiosidad, cabe mencionar también la definición de Carathéodory (para este sí, queda completamente descartada la posibilidad de encontrar un tango alusivo). Una función f como antes se dice diferenciable en x_0 en el sentido de Carathéodory si existe $\phi : A \to L(X, Y)$ continua en x_0 tal que

$$f(x) - f(x_0) = \phi(x)(x - x_0).$$

Para $\mathbb{R}^n$ es fácil ver que esta definición es equivalente a la de Fréchet[3] y resulta genial, por ejemplo, para probar la regla de la cadena sin tener que lidiar con restos fastidiosos. Pero ya sea con mayor o menor fastidio, dicha regla nos va a hacer falta, de modo que la dejamos como ejercicio:

Proposición 2.1 *(Regla de la cadena) Sean X, Y, Z espacios normados, $A \subset X$, $B \subset Y$ abiertos y $f : A \to Y$, $g : B \to Z$ diferenciables respectivamente en $x_0 \in A$ y $f(x_0) \in B$. Entonces $g \circ f$ está definida en un entorno de x_0 y es diferenciable en x_0, con $D(g \circ f)(x_0) = Dg(f(x_0)) \circ Df(x_0)$.*

En este contexto abstracto, hay que dar una pequeña voltereta para decir lo que significa que una función sea de clase C^n. En principio, si f es diferencible en A (vale decir, en todo punto de A), entonces queda definida de manera obvia una función $Df : A \to L(X, Y)$. Pero este último es también un espacio normado, con

$$\|T\| := \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|,$$

así que las siguientes definiciones son bastante razonables:

1. f es de clase C^1 en x_0 si Df es continua en x_0.

2. f es dos veces diferenciable en x_0 si Df es diferenciable en x_0.

Aquí la cuestión empieza a ponerse un tanto escabrosa, porque la diferencial segunda en x_0, que se escribe $D^2f(x_0)$, en realidad es la diferencial de Df en x_0 y, como tal, es un operador lineal continuo de X en $L(X, Y)$. En otras palabras,

$$D^2f(x_0) = D(Df)(x_0) \in L(X, L(X, Y)).$$

El panorama parece todavía peor a la hora de definir derivadas de orden superior; sin embargo, una idea salvadora viene en nuestra ayuda: el espacio $L(X, L(X, Y))$ se identifica con $B(X \times X, Y)$, es decir, el conjunto de aplicaciones bilineales continuas de $X \times X$ (con la norma usual del producto) en Y. De esta manera, en lugar de escribir un molesto $D^2f(x_0)(u)(v)$ podemos directamente poner $D^2f(x_0)(u, v)$. Y el hecho que termina de hacer nuestras delicias es que, al igual que en el caso $\mathbb{R}^n$, esta diferencial segunda resulta simétrica, es decir, $D^2f(x_0)(u, v) = D^2f(x_0)(v, u)$. La demostración general se puede hacer un poquito delicada, pero se reduce fácilmente al caso $X = \mathbb{R}^2$ y (usando Hahn-Banach) se puede suponer también que $Y = \mathbb{R}$. De esta forma, de manera inductiva se define la diferncial de orden n, que se puede pensar como un operador multilineal continuo $D^nf(x_0) \in M(X^n, Y)$, que además es simétrico. f es de clase C^n en x_0 si es diferenciable n veces en un entorno y, además, D^nf es continua en x_0.

No es difícil rescatar de lo anterior los resultados más o menos clásicos, con polinomio de Taylor incluido; de todas formas, para nuestros vamos a detenernos en $n = 1$. Y una de las propiedades que vamos a usar es la siguiente versión del teorema de Lagrange:

[3]Para un espacio normado cualquiera, hace falta usar, por ejemplo, el teorema de Hahn-Banach.

Proposición 2.2 *Sea* $f : A \to Y$ *de clase* C^1 *y supongamos que el segmento* $[x, y] := \{ty + (1 - t)x : t \in [0, 1]\}$ *está contenido en* A*. Entonces*

$$\|f(y) - f(x)\| \le M\|y - x\|,$$

donde $M := \max_{z\in[x,y]} \|Df(z)\|$.

Antes de pensar una demostración, conviene observar a toda prisa que M está bien definido: por más que estemos en un normado cualquiera, el conjunto $[x, y]$ es tan compacto como cualquier hijo de vecino. Y, ya que estamos, la parametrización $\sigma(t) = ty + (1 - t)x$ nos muestra lo fácil que es demostrar el resultado si $Y = \mathbb{R}$. En realidad, en este caso se trata de un auténtico valor medio, ya que

$$f(y) - f(x) = f(\sigma(1)) - f(\sigma(0)) = (f \circ \sigma)'(c)$$

para cierto $c \in (0, 1)$. El resultado se deduce entonces del hecho de que

$$(f \circ \sigma)'(c) = D(f \circ \sigma)(c)(1) = Df(\sigma(c))(D\sigma(c)(1)) = Df(\xi)(y - x),$$

con $\xi = \sigma(c) \in (x, y)$. Tal vez suene tonto aclararlo, pero de lo anterior se desprende que

$$\|f(y) - f(x)\| \le \|Df(\xi)\|\|y - x\|.$$

Para el que sepa Hahn-Banach, es muy fácil ahora deducir el caso general y queda como ejercicio. Para el que no lo sepa y tenga curiosidad de pensar cómo es tan milagrosa demostración, alcanza con saber que si Y es un espacio normado y $z \in Y \subset \{0\}$ entonces existe $T \in Y' := L(Y, \mathbb{R})$ tal que $\|T\| = 1$ y $|Tz| = \|z\|$. Para el que no tenga curiosidad (o descrea de los milagros), va la siguiente sugerencia: probar que vale la desigualdad de la proposición anterior con $M + \eta$, para cualquier $\eta > 0$. Para esto, se puede considerar la función $\varphi : [0, 1] \to A$ dada por $\varphi(t) := \|f(y + t(x - y)) - f(y)\| - t(M + \eta)\|x - y\|$ y probar que el conjunto de valores de t tales que $\varphi \le 0$ en $[0, t]$ es cerrado y abierto.

Con esto ya tenemos lo que necesitamos para enunciar y probar el teorema. Pero vamos a comenzar con una versión más sencilla, que involucra las llamadas *contracciones uniformes*. El primer resultado vale en general para espacios métricos completos cualesquiera, aunque ya podemos suponer que se trata de espacios de Banach.

Lema 2.1 *Sean* X *e* Y *espacios de Banach y* $U \subset X$, $V \subset Y$ *abiertos. Supongamos que* $f : U \times \overline{V} \to V$ *es continua y Lipschitz en* y *con constante* $L < 1$*. Entonces existe una única función* $y : U \to V$ *tal que* $f(x, y(x)) = y(x)$ *para todo* $x \in U$*. Además,* y *es continua.*

<u>*Demostración*</u>: Para cada $x \in U$ fijo, la función $f(x, \cdot) : \overline{V} \to V \subset \overline{V}$ es una contracción, de modo que tiene un único punto fijo $y = y(x) \in V$. Para ver

la continuidad, alcanza con observar que si escribimos $y_0 = y(x_0)$, $y(x) = y$, entonces

$$\begin{aligned}\|y - y_0\| = \|f(x,y) - f(x_0,y_0)\| &\le \|f(x,y) - f(x,y_0)\| + \|f(x,y_0) - f(x_0,y_0)\| \\ &\le L\|y - y_0\| + \|f(x,y_0) - f(x_0,y_0)\|\end{aligned}$$

Luego

$$\|y - y_0\| \le \frac{1}{1-L}\|f(x,y_0) - f(x_0,y_0)\| \to 0$$

para $x \to x_0$. $\square$

Toda la demostración del teorema de la función implícita se basa en el hecho de que, en el lema previo, si además f es de clase C^n, entonces la función y es de clase C^n. Esta cuenta es un poco más fina y resulta cómodo recurrir a la notación de las derivadas parciales.

Definición 2.2 *Sean X, Y, Z espacios normados y $U \subset X$, $V \subset Y$ abiertos. Dada una función $f : U \times V \to Z$ diferenciable en un punto (x_0, y_0), se definen las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \in L(X,Z)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \in L(Y,Z)$ en la forma*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(u) = \lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+tu,y_0) - f(x_0,y_0)}{t} = Df(x_0,y_0)(u,0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(v) = \lim_{t\to 0}\frac{f(x_0,y_0+tv) - f(x_0,y_0)}{t} = Df(x_0,y_0)(0,v).$$

Es claro, a partir de la definición, que

$$Df(x_0,y_0)(u,v) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(u) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(v).$$

También tiene sentido preguntarse (y, en lo posible, responderse) si es cierto que "C^1 implica C^1", es decir: si $f(x,\cdot)$ y $f(\cdot,y)$ son diferenciables para todo x y todo y, con $\frac{\partial f}{\partial x} : U \times V \to L(X,Z)$ y $\frac{\partial f}{\partial y} : U \times V \to L(Y,Z)$ continuas, ¿se cumple que f es de clase C^1? La respuesta es muy similar al caso $\mathbb{R}^n$, gracias a que probamos (dijo el mosquito) el teorema de Lagrange. Hay que tener un poco de cuidado: como dice el tango: vamos, hay que saber acotar (en realidad el tango dice "olvidar" pero, muy obedientes, nos olvidamos).

Para ver ahora que el punto fijo $y(x)$ definido de manera implícita en el lema previo es tan bueno como f, conviene tener en cuenta una propiedad bastante útil de los endomorfismos (¿qué tal ese léxico?) de un espacio de Banach: si $T \in L(E,E)$ tiene norma menor que 1, entonces $I - T$ es inversible. Por ejemplo, esta propiedad viene bien para ver que el conjunto de operadores inversibles es abierto, ya que en el caso general no tenemos una función "determinante": si T_0 es inversible, podemos escribir

$$T = T_0 - (T_0 - T) = T_0(I - T_0^{-1}(T_0 - T)),$$

que es inversible si $\|T_0^{-1}(T_0 - T))\| < 1$. El que no se acuerde por qué vale la propiedad, puede hacer distintas cosas:

1. Preguntarle a alguien que sepa.
2. Creer en que la propiedad vale y pasar a otro tema.
3. No creer, aduciendo que “todo es grupo, todo es falso”.
4. Inspirarse en la serie geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} t^n = (1-t)^{-1}$ válida para (¡oh, casualidad!) $|t| < 1$. Esto muestra, de paso, que $\|I - T\| \leq \frac{1}{1-\|T\|}$.
5. Usar el lema anterior: resolver el problema $y - Ty = x$ es lo mismo que encontrar un punto fijo $y = y(x)$ de la función $f(x, y) = x + Ty$.

La última pista lleva a pensar que si una función es de clase C^1, tiene que haber una relación directa entre la constante de Lipschitz y la norma de la diferencial; más concretamente, si f es como en el Lema 2.1, entonces

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(v) \right\| = \lim_{t \to 0} \left\| \frac{f(x_0, y_0 + tv) - f(x_0, y_0)}{t} \right\| \leq L\|v\|,$$

de donde se deduce que $\left\| \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right\| \leq L$. Y como $L < 1$, esto significa que $I - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ es inversible, cosa que, sospechamos, debería servir. En efecto, si escribimos

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + R(x, y)$$

entonces para la función $y = y(x)$ del lema con $y(x_0) = y_0$ se tiene

$$y - y_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + R(x, y)$$

$$\left[I - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right] (y - y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + R(x, y),$$

es decir:

$$y(x) - y(x_0) = T(x - x_0) + \hat{R}(x),$$

donde

$$T = \left[I - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right]^{-1} \circ \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$$

y

$$\hat{R}(x) = \left[I - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right]^{-1} R(x, y(x)).$$

Conclusión: alcanza con probar que $\hat{R}$ se comporta como un verdadero resto, es decir, $\frac{\hat{R}(x)}{\|x - x_0\|} \to 0$ para $x \to x_0$. Esto prueba que y es diferenciable pero, además, es claro que T resulta continua como función de (x_0, y_0), así que y es de clase C^1. La versión general para C^n sale al cabo de una paciente inducción.

Para ver que el resto se porta bien, alcanza con probar en realidad que $\frac{R(x,y(x))}{\|x-x_0\|} \to 0$ para $x \to x_0$. Y esto es bastante fácil, pues

$$\frac{R(x,y(x))}{\|x-x_0\|} = \frac{R(x,y(x))}{\|x-x_0\|+\|y(x)-y_0\|}\frac{\|x-x_0\|+\|y(x)-y_0\|}{\|x-x_0\|}.$$

Como el primer factor de este último término, queda por verificar solamente (¡ufa!) que el otro factor se mantiene acotado. Pero esta es una cuenta que ya hicimos:

$$\|y(x)-y_0\| = \|f(x,y(x))-f(x_0,y_0)\| \leq L\|y(x)-y_0\| + \|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)\|,$$

es decir

$$\|y(x)-y_0\| \leq \frac{1}{1-L}\|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)\| \to 0.$$

De esta forma, ya tenemos nuestro teorema de la función implícita:

Teorema 2.3 *Sean X, Y, Z espacios de Banach, $U \subset X, V \subset Y$ abiertos y $F : U \times V \to Z$ de clase C^n. Sea $(x_0,y_0) \in U \times V$ tal que $F(x_0,y_0) = 0$ y supongamos que $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0) : Y \to Z$ es un isomorfismo. Entonces existen $U_0 \subset U$, $V_0 \subset V$ abiertos tales que $(x_0,y_0) \in U_0 \times V_0$ y una única $y : U_0 \to V_0$ tal que $F(x,y(x)) = 0$, $y(x_0) = y_0$. Además, y es de clase C^n y vale*

$$Dy(x_0) = -\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)^{-1} \circ \frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0).$$

<u>*Demostración*</u>: De atrás para adelante: la última identidad es clara, derivando la igualdad $F(x,y(x)) = 0$. Para ver la parte más sustanciosa del teorema, la idea es inventarnos una función como la del Lema 1 cuyos puntos fijos coincidan con las soluciones de la ecuación $F(x,y) = 0$. El hecho de que aparezca involucrado un tercer espacio Z no debería amedrentarnos, pues fácilmente podemos llevar esta ecuación a una identidad en Y, donde el 0 ya no es el que era:

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)^{-1}(F(x,y)) = 0.$$

En consecuencia, alcanza con definir

$$f(x,y) = y - \frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)^{-1}(F(x,y))$$

y tratar de achicar el dominio $U \times V$ para poder aplicar el lema. Uno se preguntará por qué pusimos restando y no sumando el término que nos interesa, pero la respuesta es muy sencilla y da la clave para la demostración:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = I - \frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)^{-1} \circ \frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0) = 0;$$

luego, por continuidad podemos ya elegir un entorno $\tilde{U} \times \tilde{V}$ más chico en el que valga

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right\| \leq L < 1.$$

Por Lagrange, esto garantiza que la condición del Lema 1 se va a cumplir. Pero ahora necesitamos ajustar un poquito más el dominio, es decir, elegir $U_0 \subset \tilde{U}$ y $V_0 \subset \tilde{V}$ que contenga al punto y tal que $f(U_0 \times \overline{V_0}) \subset V_0$. Para hacerlo fácil, podemos considerar $V_0 = B_r(y_0)$, entonces

$$\|f(x, y) - y_0\| = \|f(x, y) - f(x_0, y_0)\| \leq L\|y - y_0\| + \|f(x, y_0) - f(x_0, y_0)\|.$$

$$\leq Lr + M\|x - x_0\|,$$

donde $M = \max_{\xi \in [x_0, x]} \|\frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y_0)\|$. ¡Ya casi lo tenemos! Ahora alcanza con observar que, por continuidad, se puede fijar el valor de M para cierta bola $B_{\hat{\delta}}(x_0)$ y entonces alcanza con tomar $\delta < \hat{\delta}$ chico, para poder asegurar que $Lr + M\delta < r$.

□